2000年　東大数学　文系第2問 ①

解法1

x と y の2文字が動く ⇒ 1文字固定.

$f(x,y) = 1 - ax - by - axy$ とおく.

y を固定して. x だけ動かすと考える　予選

$f(x,y) = -a(y+1)x - by + 1$　x で降べきの順

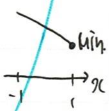
$y+1 \geqq 0$　$(-1 \leqq y \leqq 1)$ なので.

a で（$f(x,y)$ を直線とみなしたときの）傾きが決まる。

(I) $a>0$ のとき. $f(x,y)$ の傾きは負なので.

$-1 \leqq x \leqq 1$ での $f(x,y)$ の最小値は

$x=1$ のとき。つまり $f(1,y)$ である。



$f(1,y) = -a(y+1) \times 1 - by + 1$

$= -(a+b)y - a + 1$

次に y を動かす。　決勝

$f(1,y)$ を直線とみなしたときの傾きは $-(a+b)$ である。

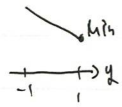
(i) $a+b>0$ のとき.

$f(1,y)$ の傾きは負なので.

最小値は $f(1,1) = -a - b - a + 1$

全体のMin → $= -2a - b + 1 > 0$　最小値が正

$\therefore b < -2a + 1$



$\therefore$ $a>0$ かつ $b>-a$ かつ $b<-2a+1$　(I)-(i) の結論

(ii) $a+b=0$ のとき

$f(1,y) = -a+1 > 0$　最小値>0

$a<1$

$\therefore$ $a>0$ かつ $b=-a$ かつ $a<1$　(I)-(ii) の結論

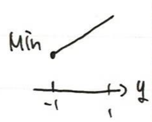
(iii) $a+b<0$ のとき

$f(1,y)$ の傾きは正なので.

最小値は $f(1,-1) = a+b-a+1$

$= b+1 > 0$　$\therefore b>-1$

Min>0



$\therefore$ $a>0$ かつ $b<-a$ かつ $b>-1$　(I)-(iii) の結論

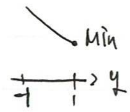
(II) $a=0$ のとき. $f(x,y) = -by+1$

この直線の傾きは $-b$ なので. b の符号で傾きが決まる。

(i) $b>0$ のとき. 傾きが負

$f(x,y)$ の最小値は $y=1$ のとき

$f(x,1) = -b+1 > 0$　$b<1$



$\therefore$ $a=0$ かつ $0<b$ かつ $b<1$　(II)-(i) の結論

(ii) $b=0$ のとき

$f(x,y)=1$ より 常に正の値をとる。

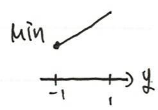
つまり $a=0$. $b=0$ は $f(x,y)$ の最小値を正にする

$\therefore$ $a=0$ かつ $b=0$　(II)-(ii) の結論

(iii) $b<0$ のとき　傾きが正

$f(x,y)$ の最小値は $y=-1$ のとき

$f(x,-1) = b+1 > 0$　$\therefore b>-1$

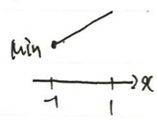


$\therefore$ $a=0$ かつ $b<0$ かつ $b>-1$　(II)-(iii) の結論

(III) $a<0$ のとき. $f(x,y)$ の傾きは正なので.

$-1 \leqq x \leqq 1$ での $f(x,y)$ の最小値は

$x=-1$ のとき。つまり $f(-1,y)$



$f(-1,y) = a(y+1) - by + 1$

$= (a-b)y + a + 1$

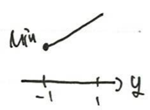
次に y を動かす　決勝

$f(-1,y)$ を直線とみなしたときの傾きは $a-b$ である。

(i) $a-b>0$ のとき.

$f(-1,y)$ の傾きは正なので.

最小値は $y=-1$.



$f(x,y)$ の全体のMin　$f(-1,-1) = -(a-b) + a + 1 = b+1 > 0$　最小値>0

$\therefore$ $a<0$ かつ $b<a$ かつ $b>-1$　(III)-(i) の結論

2000年　東大数学　文系第2問 ②

(ii)　$a-b=0$ のとき.

$f(-1,y)=a+1>0$ 最小値>0

$\therefore$ $a<0$ かつ $b=a$ かつ $a>-1$　(Ⅲ)-(ii) の結論

(iii)　$a-b<0$ のとき.

$f(-1,y)$ の傾きは負なので.

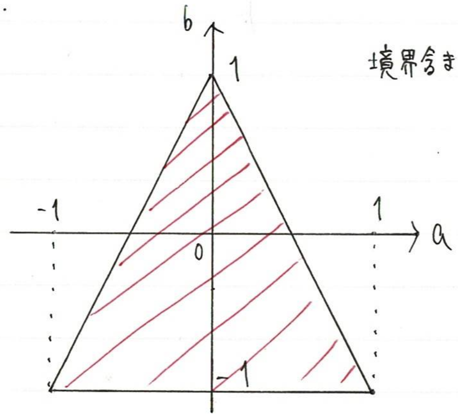
最小値は $f(-1,1)=a-b+a+1$

$=2a-b+1>0$ 最小値>0

Min

$\therefore$ $a<0$ かつ $b>a$ かつ $b<2a+1$　(Ⅲ)-(iii) の結論

以上、(Ⅰ)-(i) から (Ⅲ)-(iii) の条件を ab 平面に図示すると.



解法2

$f(x,y)=1-ax-by-axy$ としたとき.

- x を固定すると. $f(x,y)=-(ax+b)y-ax+1$ となる。

これは. y を変数とした直線とみなせるため.

$-1\leqq y\leqq 1$ の範囲の最小値は.

$f(x,-1)$ か $f(x,1)$ である。

傾きを決めずに議論をすすめる

- 同様に. y を固定しても $f(x,y)$ は直線なので.

最小値は $f(-1,y)$ か $f(1,y)$ である。

以上から x と y を $-1\leqq x\leqq 1$, $-1\leqq y\leqq 1$ で動かしたときの最小値は

$f(-1,-1)$　$f(-1,1)$　$f(1,-1)$　$f(1,1)$ の4つのうち.

最も小さい値である。

$f(-1,-1)=1+a+b-a=b+1$

$f(-1,1)=1+a-b+a=2a-b+1$

$f(1,-1)=1-a+b+a=b+1$

$f(1,1)=1-a-b-a=-2a-b+1$ であるから.

同じ値

$f(x,y)$ の最小値は

$b+1$, $2a-b+1$, $-2a-b+1$ のうち.

最も小さい値である。

これが正になればよいが.

3つのうち最も小さい値が正になることと.

全てが正になることは同値。

a. b. c のうち最小値>0

$\Leftrightarrow$ $a>0$ かつ $b>0$ かつ $c>0$

よって. $\begin{cases} b+1>0 & \text{かつ} \\ 2a-b+1>0 & \text{かつ} \\ -2a-b+1>0 \end{cases}$ の領域を. ab 平面に描けばよい。

すると. 解法1と同じ図になる。